

Nom :

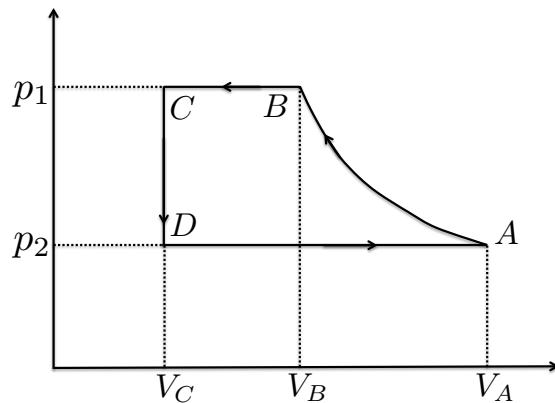
Prénom :

N° Sciper :

A. Machine thermique à deux isobares (4/10 points)

On considère un gaz parfait, comprenant N moles d'une seule substance, qui subit le cycle thermodynamique décrit sur la figure ci-dessous. Tous les processus sont supposés **réversibles**.

- Partant de l'état A , défini par sa pression et son volume (p_2, V_A), un piston comprime le gaz par un processus adiabatique, qui amène le gaz à la pression p_1 .
- On s'arrange alors pour refroidir le gaz de façon réversible en maintenant la pression constante égale à p_1 jusqu'à ce que le volume atteigne la valeur V_C .
- Le gaz est alors refroidi dans un processus isochore, provoquant une chute de la pression jusqu'à la valeur p_2 .
- Un processus d'expansion isobare à la pression p_2 est alors imposé au gaz pour le ramener à l'état initial A .



Questions et réponses au verso !

1. (0.5 point) Le cycle parcouru comme indiqué est-il du type cycle moteur ?

Oui Non. Justifier :

La puissance mécanique reçue est donnée par $P_W = -p\dot{V}$. Le travail reçu sur un cycle vaut $\int P_W dt = \int_{cycle} -pdV$ est positif pour le sens donné. Par conséquent, ce cycle reçoit du travail, c'est un cycle de machine thermique, pas un cycle moteur

2. (0.5 point) Déterminer le volume V_B , les grandeurs suivantes étant supposées connues : V_A , V_C , p_1 , p_2 , γ .

$$V_B = V_A \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma}$$

3. (1.0 point) Calculer le changement d'entropie dans le processus BC . On considère dorénavant connues les grandeurs suivantes : V_A , V_B , V_C , p_1 , p_2 , γ .

$$\Delta S_{BC} = (c+1)NR \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right)$$

4. (1.0 point) Calculer la chaleur fournie dans le processus DA .

$$Q_{DA} = (c+1)p_2(V_A - V_C)$$

5. (1.0 point) On suppose maintenant qu'au lieu d'utiliser un gaz parfait, on utilise un fluide qui subit une transition de phase en allant de B à C . Les paramètres du cycle sont choisis de manière que le fluide soit un gaz qu'on peut considérer comme parfait entre A et B . Le processus BC est une condensation isobare et isotherme ayant lieu à la température T_B . On suppose qu'en C il y a seulement du liquide. On note $L_{\ell g}$ la chaleur latente molaire de vaporisation du fluide. Que vaut dans ce cas-ci le changement d'entropie du processus BC . Les grandeurs suivantes sont supposées connues : N , V_A , V_B , V_C , p_1 , p_2 , γ .

$$\Delta S_{BC} = -\frac{N^2 R L_{\ell g}}{p_1 V_B}$$

Juin 2015 - 8h15-11h15

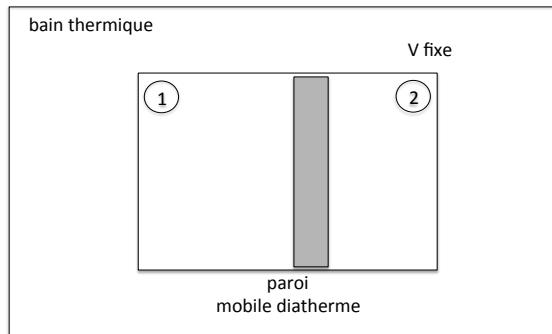
Nom :

Prénom :

N° Sciper :

B. Deux sous-systèmes dans un bain thermique (3/10 points)

Un gaz de N molécules est enfermé dans un récipient rigide de volume V dont les parois sont telles qu'elles maintiennent un équilibre thermique avec un bain thermique de température T , en tout temps dans les processus décrits dans le problème. Le récipient est divisé en deux compartiments séparés par une paroi imperméable, diatherme et mobile. Une force de frottement visqueux agit sur la paroi quand elle se déplace. L'énergie cinétique et l'énergie interne de la paroi sont toujours négligeables.



Le système thermodynamique considéré est le gaz séparé par la paroi en deux sous-systèmes. Initialement, la paroi est relâchée et le système tend vers l'équilibre. On notera F l'énergie libre du système, U son énergie interne, S son entropie. Le déplacement de la paroi est supposé être le seul mécanisme provoquant une production interne d'entropie. On notera Π_S le taux de production d'entropie. Le récipient étant rigide, son volume V ne change pas et donc, aucun travail n'est opéré sur le gaz.

L'évolution de l'entropie du système est donnée par

$$\dot{S} = \frac{P_Q}{T} + \Pi_S$$

On notera δQ un échange infinitésimal de chaleur échangée entre le système et le bain thermique.

Soit V_1 le volume du sous-système 1. On rappelle ici que des considérations thermodynamiques fondamentales sur la stabilité locale d'un système impliquent :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V_1^2} \geq 0$$

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) En partant des principes généraux de la thermodynamique, démontrer que $dF = \delta Q - TdS$ pour ce système baigné.

Par définition, $F = U - TS$. Alors $dF = dU - TdS - SdT$. Or $dU = \delta Q + \delta W$. Le système est rigide, alors $\delta W = 0$. De plus, par hypothèse du système baigné, $dT = 0$. Il reste pour dF le résultat annoncé.

2. (**0.5 point**) Montrer que $dF \leq 0$.

Dans $\dot{S} = I_S + \Pi_S$, on pose $I_S = P_Q/T$. On peut le faire car T est défini. On a $dS = \delta Q/T + \Pi_S$. Avec le résultat en-dessus, on a $dF = -T\Pi_S$. Comme $\Pi_S \geq 0$, $dF \leq 0$.

3. (**0.5 point**) Pour un système simple de volume V et de température T , quelle grandeur physique est égale à $\frac{-\partial F}{\partial V}$. Donner une justification.

Par définition $F = U - TS$. On calcule la différentielle, compte tenu de Gibbs : $dF = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV + \mu dN$. Ainsi, F est fonction de T , V et N et le deuxième terme implique que $p = -\partial F/\partial V$.

4. (**0.5 point**) Pour le système composé de deux sous-systèmes, dont les volumes sont V_1 et V_2 respectivement, donner une expression de dF en fonction des pressions p_1 et p_2 des sous-systèmes et du volume V_1 .

A température fixe, on a

$$dF = dF_1 + dF_2 = -p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = (p_2 - p_1) dV_1$$

5. (**0.5 point**) Pour le système composé de deux sous-systèmes, dont les volumes sont V_1 et V_2 , et les pressions p_1 et p_2 , démontrer que la condition locale de convexité de F est satisfaite, compte tenu de la relation $\frac{\partial^2 F}{\partial V_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial V_1^2}$ et de la définition du coefficient de compressibilité isotherme du gaz,

$$\kappa_T = \frac{-1}{V} \frac{\partial p}{\partial V} \geq 0$$

On a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V_1^2} = \frac{\partial}{\partial V_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial V_1} - \frac{\partial U_2}{\partial V_2} \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial V_1} + \frac{\partial p_2}{\partial V_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial V_1} - \frac{\partial p_2}{\partial V_2}$$

Avec la définition de la compressibilité, valable pour chaque compartiment, on tire :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V_1^2} = \kappa_T (V_1 + V_2) = \kappa_T V \geq 0$$

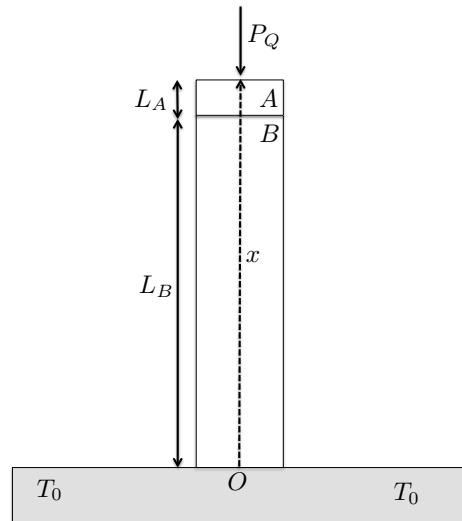
Nom :

N° Sciper :

Prénom :

C. Chauffage laser (3/10 points)

La surface d'une couche mince d'un matériau A est illuminée par un laser. La couche mince est déposée sur un substrat composé d'un matériau B . On va conduire une analyse restreinte à un processus ayant lieu dans une direction spatiale, indiquée par l'axe cartésien Ox sur la figure. On va donc considérer qu'on a à faire à une colonne indiquée sur la figure. Les côtés de cette colonne sont supposés thermiquement isolés. On désignera par L_A l'épaisseur de la couche du matériau A et par L_B celle du matériau B . La section de la colonne est carrée, de côté a . Son aire vaut donc a^2 . L'absorption de la lumière à la surface de la couche mince est un processus thermique de puissance P_Q .



La base de la colonne est maintenue à la température T_0 . La température est supposée égale en tout point d'une section de la colonne, dans un plan normal à l'axe de coordonnée Ox . On la note $T(x)$. On désigne par $\mathbf{j}_Q(x)$ la densité de courant de chaleur à la position x . Les conductivités thermiques des matériaux A et B sont κ_A et κ_B respectivement, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_Q(x) &= -\kappa_A \nabla T(x) & (L_B < x < L_A + L_B) \\ \mathbf{j}_Q(x) &= -\kappa_B \nabla T(x) & (0 < x < L_B)\end{aligned}$$

On suppose que les conductivités κ_A et κ_B sont indépendantes de la température et que les matériaux A et B obéissent à la loi de Dulong-Petit.

Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) Démontrer que ∇T ne dépend pas de x à l'intérieur de chaque couche, quand la colonne a atteint un état stationnaire. Utiliser l'équation de continuité $\partial_t u = -\nabla \cdot j_u$.

L'équation de continuité dans le régime stationnaire se réduit à $\nabla \cdot j_u = 0$. Or ici $j_u = j_Q$ parce qu'il n'y a pas de déplacement de matière. Pour finir, avec les lois de Fourier, il reste $\nabla^2 T = 0$, ce qui veut dire que les gradients de températures sont indépendants de x .

2. (**0.5 point**) Déterminer la puissance thermique P_Q^I entre l'extérieur et l'interface de la colonne, c'est-à-dire, à la jonction entre les matériaux A et B .

Comme les parois de la colonne sont thermiquement isolées, $P_Q^I = 0$ ce qui implique que le courant de chaleur est le même dans A et dans B .

3. (**0.5 point**) Dans le monde de la technique, on parle parfois de résistance thermique. Par analogie avec la loi d'Ohm, on écrit $\Delta T = R_{th} P_Q$ où ΔT est la chute de température dans le substrat B , $\Delta T = T(L_B) - T(0)$. Exprimer R_{th} en fonction de κ_B , L_B et a^2 .

$$R_{th} = \frac{\kappa_B^{-1} L_B}{a^2}$$

4. (**0.5 point**) Déterminer la température au sommet de la colonne $T_{max} = T(x = L_A + L_B)$, quand la colonne a atteint un état stationnaire. Donner la réponse en fonction de P_Q , de T_0 , des conductivités thermiques et des dimensions de la colonne.

$$T_{max} = P_Q \left(\frac{\kappa_A^{-1} L_A}{a^2} + \frac{\kappa_B^{-1} L_B}{a^2} \right) + T_0$$

5. (**1.0 point**) On se demande combien de temps il faudrait au laser pour chauffer le matériau A jusqu'à une valeur limite T_{lim} de la température, si la colonne B est un isolant thermique, c'est-à-dire qu'on peut négliger la conduction thermique dans le matériau B , i.e. $\kappa_B = 0$. Ici, on vous demande d'introduire la ou les grandeurs thermodynamiques caractéristiques du matériau dont vous avez besoin pour obtenir le temps t_{lim} pour atteindre cette température en partant de l'état d'équilibre avant que le laser soit enclenché.

grandeur : chaleur spécifique à volume constant C_V (pour la couche de A)

$$t_{lim} = \frac{C_V(T_{lim} - T_0)}{P_Q}$$